

ALGEBRA-TRAINING

THEORIE & AUFGABEN

Serie 4

Gleichungen

Theorie und Aufgaben: Meinrad Schauwecker

Liebe Schölerin, lieber Schöler

In den Serien 1 bis 3 hast du geübt, Terme umzuformen. Die Serie 4 befasst sich mit dem zweiten wichtigen Gebiet der Algebra, nämlich mit dem Lösen von Gleichungen.

Wir freuen uns, dich bald am Gymnasium begrüßen zu dürfen.

Technische Hinweise

Diese Aufgabenserie verteilen wir als PDF an unsere Benutzer. Sie ist so gestaltet, dass sie sinnvollerweise als Broschüre auf A3-Papier gedruckt wird.

Wir bitten alle Benutzer dieser Serien, uns auf Fehler aufmerksam zu machen und auch allfällige Änderungs- und Verbesserungswünsche uns mitzuteilen, am einfachsten per E-Mail an: mathematikuebungen@kzn.ch.

1. Auflage, 19. Mai 2015

Kantonsschule Zürich Nord, Fachschaft Mathematik

Autoren: Ronald Balestra, Katharina Lapadula, Bernhard Marugg, Meinrad Schauwecker

Koordination: Kathrin Steiner

Satz: Franz Piehler

Begutachtung: Christoph Barandun (SEKZH), Markus Huber (Kantonsschule Stadelhofen, LKM)

Theorie und Aufgaben

Beispiel 1 (ohne Brüche, ohne Klammern)

Wir betrachten die Gleichung

$$24x - 15 + 12x - 63 = 42x - 51 + 21x - 36$$

1. Schritt Vereinfachen der beiden Seiten der Gleichung

$$36x - 78 = 63x - 87$$

Beachte: Beim Lösen von Gleichungen sind alle Termumformungen erlaubt!

2. Schritt Bringe alle x auf die Seite, auf welcher es mehr x hat, die Zahlen auf die andere Seite der Gleichung!

$$36x - 78 = 63x - 87 \quad | -36x + 87$$

Beachte: Bei beidseitigem Addieren / Subtrahieren verändern sich Lösungen nicht! Eine solche Umformung nennt man «Äquivalenz-Umformung».

3. Schritt Beidseitiges Dividieren durch die Zahl bei x , wechseln der beiden Seiten der Gleichung.

$$9 = 27x \quad | : 27; \leftrightarrow$$

Beachte: Beidseitiges Dividieren durch eine Zahl ($\neq 0$) ist auch eine «Äquivalenz-Umformung», das Vertauschen der beiden Seiten natürlich ebenso.

Dann Kürzen nicht vergessen (Termumformung)!

$$x = \frac{9}{27} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$$

Die **Lösung** der Gleichung wird in der Form $x =$ **Lösungszahl** dargestellt und hervorgehoben (unterstreichen, einrahmen, ...).

1 a) $12x - 34 = 45 - 67x$

b) $765 - 567x = 234 - 432x$

c) $x + 2x + 3x + \dots + 9x = 135$

d) $1000x - 1234 = 1234x + 1000$

e) $123x - 234 = 456x + 567$

f) $100x - 99x + 98x - 97x + 96x - \dots + 4x - 3x + 2x - x = 100$

Beispiel 2 (ohne Brüche, mit Klammern)

Wir betrachten die Gleichung

$$11 - 12 \cdot (x - 2) = 12 + 11 \cdot (2x - 1)$$

1. Schritt Ausmultiplizieren (Termumformung)

$$11 - 12x + 24 = 12 + 22x - 11$$

Beachte: $(-12) \cdot (-2) = +24$ das ist leider eine häufige Fehlerquelle!

Löse selber weiter wie im Beispiel 1 (du solltest als Lösung $x = 1$ bekommen).

2 a) $4(3x - 2) = 5(4 - 3x) + 2$	b) $8 - 7(6 - 5x) = 4 - 3(2x - 1)$
c) $1 - 2x - 3(x - 4) = 5(6 - 7x) - 8 + 9x$	d) $5(7 - 3x) - 1 = 5 - (7 - 3x)$
e) $x - 2(x - 3(x - 3)) = 4 - 3(x - 2(x - 1))$	f) $x + 2(x - 3(x + 4(x - 5))) = 12$

Hinweis: Klammern «von innen nach aussen» hin lösen!

Beispiel 3 (mit einfachen Brüchen, ohne Klammern)

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{3}{4}x - 1 + \frac{5}{6}x = 2x + \frac{5}{6} + \frac{1}{9}$$

Bemerkung: Zur Schreibweise von Gleichungen mit Bruchzahlen gilt: $\frac{3}{4}x = \frac{3x}{4}$.

1. Schritt Gleichnamig machen (zuerst zusammenfassen lohnt sich meistens nicht)

$$\frac{27x}{36} - \frac{36}{36} + \frac{30x}{36} = \frac{72x}{36} + \frac{30}{36} + \frac{4}{36} \quad | \cdot 36$$

Dazu nimmst du das kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches, hier 36) aller Nenner!

Beachte: Auch Summanden ohne Nenner (hier -1 und $2x$) müssen auf diesen gemeinsamen Nenner gebracht werden!

2. Schritt Multipliziere dann beidseitig mit dem Nenner.

$$27x - 36 + 30x = 72x + 30 + 4$$

Beachte: Beidseitiges Multiplizieren mit einer Zahl ($\neq 0$) ist eine «Äquivalenz-Umformung»!

Löse selber weiter wie im Beispiel 1 (du solltest als Lösung $x = -\frac{14}{3}$ bekommen.)

Beachte: Benutze keine Dezimalbrüche, wenn die Zahlen in der Gleichung in Bruchform geschrieben sind.

$$3 \quad \text{a) } \frac{9x}{7} - \frac{7}{9} = \frac{7}{9}x + \frac{9}{7}$$

$$\text{b) } \frac{7}{5}x - 1 = \frac{7x}{5} + 1$$

$$\text{c) } \frac{1}{18}x + 12 = \frac{x}{12} - 18$$

$$\text{d) } \frac{1}{12}x + 8 = 12x - \frac{1}{8}$$

$$\text{e) } \frac{x}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{3x}{4} = 5$$

$$\text{f) } 3 - \frac{x}{2} = 2x - \frac{1}{3}$$

Beispiel 4 (mit komplizierteren Brüchen, ohne Klammern)

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{1}{6} + \frac{2-x}{3} - x = 1 - \frac{x-3}{2}$$

1. Schritt Wie in Beispiel 3 gleichnamig machen (es können neue Klammern erforderlich werden!)

$$\frac{1}{6} + \frac{2(2-x)}{6} - \frac{6x}{6} = \frac{6}{6} - \frac{3(x-3)}{6} \quad | \cdot 6$$

2. Schritt Beidseitig mit dem Nenner multiplizieren.

$$1 + 2(2-x) - 6x = 6 - 3(x-3)$$

3. Schritt Die vorhandenen Klammern ausmultiplizieren.

$$1 + 4 - 2x - 6x = 6 - 3x + 9$$

Beachte: Wer gut geübt ist, der kann natürlich die Schritte 2. & 3. in einem einzigen Schritt erledigen.

Aber: Hier geschehen die meisten (Vorzeichen-)Fehler!

Löse selber weiter wie im Beispiel 1 (du solltest als Lösung $x = -2$ bekommen).

$$4 \quad \text{a) } \frac{7}{6} - \frac{x-1}{15} = \frac{x}{6} - \frac{x+1}{10}$$

$$\text{b) } \frac{x+2}{3} + \frac{3x}{2} = \frac{3-x}{2} + \frac{2x}{3}$$

$$\text{c) } \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{4} = 10$$

$$\text{d) } \frac{3x-1}{4} - \frac{2x-1}{5} - \frac{x-1}{6} = 8$$

$$\text{e) } x - \frac{x+18}{12} = 27 - \frac{x-12}{18}$$

$$\text{f) } \frac{x-4}{5} = \frac{x-5}{4} - 1$$

Beispiel 5 (mit Brüchen, mit Klammern)

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} \left(x + \frac{1}{2} \right) - x = 2 \left(x - \frac{1}{3} \right) - \frac{x-1}{4}$$

1. Schritt Unbedingt *zuerst* die Klammern ausmultiplizieren!

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} - x = 2x - \frac{2}{3} - \frac{x-1}{4}$$

Als Erstes die Nenner wegschaffen führt oft zu Fehlern. Das kgV aller Nenner (hier 24) ist in der Ausgangsgleichung nicht leicht zu erkennen, und das korrekte Multiplizieren mit diesem kgV ist dann auch noch ziemlich heikel.

2. Schritt Gleichnamig machen

$$\frac{20}{24} - \frac{18}{24}x - \frac{9}{24} - \frac{24}{24}x = \frac{48}{24}x - \frac{16}{24} - \frac{6(x-1)}{24}$$

3. Schritt Erst jetzt beidseitig mit dem Nenner multiplizieren

$$20 - 18x - 9 - 24x = 48x - 16 - 6(x-1)$$

4. Schritt und dann die Klammern ausmultiplizieren

$$20 - 18x - 9 - 24x = 48x - 16 - 6x + 6$$

Löse selber weiter wie im Beispiel 1 (du solltest als Lösung $x = \frac{1}{4}$ bekommen).

Das war jetzt schon eine sehr anspruchsvolle Aufgabe!

5 a) $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{3} + 1 \right) = 5$

b) $\frac{2-x}{6} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{4} + 1 \right) = 1 - x$

c) $\frac{11}{12}x - \frac{5}{6} \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \right) = 13$

d) $\frac{3}{2} \left(\frac{x+1}{4} - \frac{x-1}{5} \right) = 3$

e) $\frac{4}{3}x - \frac{3}{4} \left(\frac{x-4}{3} - \frac{3}{4}x \right) = 80$

f) $8 \left(\frac{x}{9} - 8 \right) = 9 \left(\frac{x}{8} - 9 \right)$

Schlusstest (Zeit: 45 Minuten)

Hilfsmittel: Ein gewöhnlicher Taschenrechner.

Die Gleichungen sind zunächst abzuschreiben und dann die einzelnen Schritte ordentlich zu notieren. Gib die vollständig gekürzte Lösung in der Form ($x = \text{«Lösungszahl»}$) an.

1 $12x + 13 = 14x - 15$

2 $9876x - 4321 = 8765x + 1234$

3 $2x - 7(x - 33) = 99 - 3(2x - 44)$

4 $x + 1 - 2(x + 3(x - 4(x - 5))) = 0$

5 $\frac{x}{6} - \frac{19}{18} = \frac{x}{12} + \frac{10}{9}$

6 $\frac{3x - 11}{15} - \frac{2x + 5}{18} = \frac{1}{2}$

7 $2 + \frac{x - 11}{11} - \frac{x + 10}{10} = x$

8 $\frac{3}{2} \left(\frac{x}{5} + 1 \right) = 2 + \frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{5} \right)$

9 $\frac{1}{12}(3x + 2) - \frac{x}{8} = 1 + \frac{1}{24}(2x + 3)$

10 $\frac{7x - 2}{3} - \frac{4}{5}(x + 3) + 6 = \frac{3(x + 2)}{2}$

Ergebnisse

Aufgaben

- | | | | | | | |
|---|--------------------|--------------------|------------------|------------------------|---------------------|------------------|
| 1 | a) 1 | b) $\frac{59}{15}$ | c) 3 | d) $-\frac{1117}{117}$ | e) $-\frac{89}{37}$ | f) 2 |
| 2 | a) $\frac{10}{9}$ | b) 1 | c) $\frac{3}{7}$ | d) 2 | e) 8 | f) 4 |
| 3 | a) $\frac{65}{16}$ | b) $\frac{35}{12}$ | c) 1080 | d) $\frac{15}{22}$ | e) 12 | f) $\frac{4}{3}$ |
| 4 | a) 10 | b) $\frac{1}{2}$ | c) 11 | d) 43 | e) 30 | f) 29 |
| 5 | a) 42 | b) 2 | c) 21 | d) 31 | e) 48 | f) 72 |

Schlusstest

- 14
- 5
- 0
- 7
- 26
- 17
- 0
- 1
- 31
- 2