Algebra-Training

Theorie & Aufgaben

Serie 2

Potenzen und Wurzeln

Theorie und Aufgaben: Ronald Balestra, Katharina Lapadula

VSGYM / Volksschule – Gymnasium

Liebe Schülerin, lieber Schüler

Der Leitspruch «*Übung macht den Meister*» gilt weiterhin!

Die Bearbeitung der Serie 1 hat sicher Vieles wieder in deine Erinnerung zurückgeholt und du spürst einen Trainingseffekt.

In dieser zweiten Serie wirst du dich mit den Operationen 3. Stufe beschäftigen. Potenzen und Wurzeln kommen häufig vor, wenn Wachstums-Vorgänge in der Natur oder im Finanzwesen mathematisch beschrieben werden.

Wir machen keine Zeitangaben mehr, denn dir ist sicher bei der Bearbeitung der Serie 1 klar geworden, dass zum Trainingserfolg auch eine gewisse Geschwindigkeit gehört.

Wir freuen uns, dich bald am Gymnasium begrüssen zu dürfen.

Technische Hinweise

Diese Aufgabenserie verteilen wir als PDF an unsere Benutzer. Sie ist so gestaltet, dass sie sinnvollerweise als Broschüre auf A3-Papier gedruckt wird.

Wir bitten alle Benutzer dieser Serien, uns auf Fehler aufmerksam zu machen und auch allfällige Änderungs- und Verbesserungswünsche uns mitzuteilen, am einfachsten per E-Mail an:
mathematikuebungen@kzn.ch.

1. Auflage, 19. Mai 2015

Kantonsschule Zürich Nord, Fachschaft Mathematik

Autoren: Ronald Balestra, Katharina Lapadula, Bernhard Marugg, Meinrad Schauwecker

Koordination: Kathrin Steiner

Satz: Franz Piehler

Begutachtung: Christoph Barandun (SEKZH), Markus Huber (Kantonsschule Stadelhofen, LKM)

Quellenangabe: Einige Aufgaben stammen aus
Walter Hohl: Arithmetik und Algebra 1 + 2
Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1975

Theorie

Operationen 3. Stufe: Potenzieren und Wurzeln ziehen

Vorbemerkung: Wenn nichts anderes erwähnt ist, sind alle Variablen, die in dieser Serie vorkommen, positiv.

Begriffe

- Der ganze Ausdruck a^n heisst *n-te Potenz von a*. a heisst *Basis*, n heisst *Exponent*.
- Der ganze Ausdruck $\sqrt{a}$ heisst *Quadratwurzel von a* oder kurz *Wurzel von a*. a heisst *Radikand*. Zieht man aus a die Wurzel, kann man auch sagen, man *radiziert a*.

Das Potenzieren ist die Zusammenfassung der Multiplikation von lauter gleichen Faktoren.

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5$$

Das (Quadrat-) Wurzelziehen ist für positive Zahlen die Umkehroperation des Quadrierens.

Wird eine positive Ausgangszahl zuerst quadriert und dann aus dem Zwischenergebnis die Wurzel gezogen, ist das Ergebnis wieder die Ausgangszahl: $\sqrt{5^2} = 5$

Oder anders formuliert: $\sqrt{16} = 4, \quad \text{weil} \quad 4^2 = 16$

Rechenregeln für Operationen der dritten Stufe

1 Eine Potenz potenzieren:

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\qquad$ $(5^2)^3 = 5^{2\cdot 3} = 5^6$

2 Potenzen und Wurzeln:

$\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$ $\qquad$ $\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3$

denn $\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$ und $(\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$

3 Spezialfälle:

$a^0 = 1$ Es wird vereinbart, dass beim Exponenten 0 die Potenz immer den Wert 1 hat.

$a^1 = a$ Der Exponent 1 verändert den Wert der Potenz nicht (und wird oft nicht geschrieben).

$0^1 = 0^2 = 0^3 = 0^4 = \ldots = 0$ Das ist einfach, aber:

$0^0 = ?$ Welche Regel soll hier genommen werden? $a^0 = 1$ oder $0^n = 0$?
Dieses Problem umgehen wir, indem wir vereinbaren, dass 0^0 nicht existiert, die Mathematiker sagen:

0^0 ist «nicht definiert».

Zwei Bemerkungen

- Multipliziert man eine positive Zahl mit einem Faktor, der zwischen 0 und 1 liegt, dann wird das Ergebnis kleiner als die ursprüngliche Zahl. (*Beispiel:* $4 \cdot 0.8 = 3.2$)

  Darum gilt:

  Ist a zwischen 0 und 1, dann ist $a^n \leq a$ für alle natürlichen Exponenten.
  Beispiele: $0.5^3 < 0.5$, $0.99^{1000} < 0.99$

  Ist a grösser als 1, dann ist $a^n \geq a$ für alle natürlichen Exponenten.
  Beispiel: $1.1^2 > 1.1$

- Potenzen von negativen Zahlen:

  Wird eine negative Zahl mit einem *ungeraden* Exponenten potenziert, dann ist das Ergebnis *negativ*; wird eine negative Zahl mit einem *geraden* Exponenten potenziert, dann ist das Ergebnis *positiv*.
  Begründung: Minus mal Minus gibt Plus, Minus mal Minus mal Minus gibt Minus, etc.

  $$(-1)^3 = -1 \qquad (-3)^4 = +81 \qquad (-2)^5 = -32 \qquad (-x)^{27} = -x^{27} \qquad (-x)^{42} = x^{42}$$

  Eine Potenz (Operation 3. Stufe) bindet stärker als ein Minus (Operation 1. Stufe). Darum muss eine negative Basis mit Klammern geschrieben werden, sonst wird das Minus nicht mitpotenziert:

  $$-2^4 \neq (-2)^4 \qquad \text{denn} \quad -2^4 = -(2^4) = -16 \quad \text{aber} \quad (-2)^4 = 16$$

  Klammern ausserhalb bewirken aber nichts:

  $$-2^4 = (-2^4) = -16$$

Verbindung von Operationen verschiedener Stufen

Rechenreihenfolge

- Klammern immer zuerst berechnen
- «Potenz vor Punkt vor Strich»: Operationen höherer Stufen binden stärker, sie haben dieselbe Wirkung wie eine Klammer.

$$8 + 3 \cdot 2 - 4 : 2 = 8 + 6 - 2 = 12$$
$$(8 + 3) \cdot 2 - 4 : 2 = 11 \cdot 2 - 2 = 20$$
$$(8 + 3) \cdot (2 - 4) : 2 = 11 \cdot (-2) : 2 = -11$$
$$(8 + 3 \cdot 2 - 4) : 2 = (8 + 6 - 4) : 2 = 5$$
$$8 + 3 \cdot (2 - 4 : 2) = 8 + 3 \cdot (2 - 2) = 8 + 3 \cdot 0 = 8$$

Verbindung von 1. und 3. Stufe

Die erste und die dritte Stufe vertragen sich schlecht.

Die wichtigsten Beispiele, wie man Summen und Quadrate kombinieren kann, sind die drei Binomischen Formeln. Diese wirst du auch in den ersten Wochen im 3. Gymi kennenlernen. Der Vollständigkeit halber sind sie hier erwähnt.

Bei der Herleitung wird die Potenz zuerst in ein Produkt umgeformt und mit dem doppelten Distributivgesetz ausgerechnet. Dabei ergeben sich folgende Formeln:

- $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b) \cdot (a-b) = a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - b^2$

Verbindung von 2. und 3. Stufe

Potenzen

- gleiche Basis, unterschiedlicher Exponent:

  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\qquad$ $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

  $a^n : a^m = a^{n-m}$ $\qquad$ $7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$

- unterschiedliche Basis, gleicher Exponent:

  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\qquad$ $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$

  oder umgekehrt:
  $(-3b)^2 = (-3)^2 \cdot b^2 = 9b^2$

  $a^n : b^n = (a : b)^n$ $\qquad$ $6^5 : 3^5 = (6 : 3)^5 = 2^5$

- Sind weder die Basis noch der Exponent gleich, kann der Term nicht umgeformt werden.

  $a^n \cdot b^m$ kann nicht vereinfacht werden $\qquad$ $2^3 \cdot 5^4 = 8 \cdot 625 = 5\,000$

Wurzeln

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\qquad$ $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ $\qquad$ $\sqrt{36 : 9} = \sqrt{36} : \sqrt{9} = 6 : 3 = 2$

Rechnen mit Wurzeln

Beim Rechnen mit Wurzeln gibt es ein paar Standardaufgaben.

- teilweise die Wurzel ziehen (= partiell die Wurzel ziehen = Wurzel reduzieren):

$$\sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 25} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{5} \cdot 5 = 5\sqrt{5}$$
$$\sqrt{6a^2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{6} \cdot a = a\sqrt{6}$$
$$\sqrt{16bc^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c^2} = 4 \cdot \sqrt{b} \cdot c = 4c\sqrt{b}$$

- Produkte von Wurzeln vereinfachen:

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{6 \cdot 12} = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 2} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$
$$\sqrt{3m} \cdot \sqrt{2m} = \sqrt{3m \cdot 2m} = \sqrt{6m^2} = m\sqrt{6}$$

- Additionen/Subtraktionen mit Wurzeln: gleiche Wurzeln können ausgeklammert und der Term in der Klammer zusammengefasst werden.

$$7\sqrt{a} - 3\sqrt{a} = (7-3)\sqrt{a} = 4\sqrt{a}$$
$$10x\sqrt{y} + 2x\sqrt{y} - 3\sqrt{y} = (10x + 2x - 3)\sqrt{y} = (12x - 3)\sqrt{y}$$

Aufgaben

1 **a)** $10 + 3 \cdot 5^2$ **b)** $10 + 3^2 \cdot 5^2$ **c)** $10^2 + 3 \cdot 5$ **d)** $10 + (3 \cdot 5)^2$

e) $10 + (3 \cdot 5^2)$ **f)** $(10 + 3)^2 \cdot 5$ **g)** $(10 + 3^2) \cdot 5$ **h)** $(10 + 3 \cdot 5)^2$

2 **a)** $6^2 + 5 \cdot 6^2 - 5$ **b)** $(6 + 5)^2 \cdot 6 - 5^2$ **c)** $6^2 + (5 \cdot 6)^2 - 5$ **d)** $(6 + 5)^2 \cdot (6 - 5)^2$

3 Schreibe den Term als Produkt, indem du möglichst viele gemeinsame Faktoren ausklammerst.

a) $6a^2b + 10a^2c$ **b)** $4y^2 - 3yz$ **c)** $18b^2d + 27bd^2$ **d)** $56xy^2z^2 - 49y^2z^2$

e) $27ab^2 - 18b^2d$ **f)** $17ef - 13e^2z$ **g)** $36xy^2 - 24yz^2$ **h)** $48a^2bc^2 + 56b^2c$

4 Bestimme die natürliche Zahl x, für welche die Gleichung richtig ist.

a) $100 \cdot 10^5 = 10^x$ **b)** $10^3 \cdot 10^4 = 10^x$ **c)** $100 \cdot 10^x = 1\,000\,000$

d) $10^x \cdot 10^3 = 100\,000$ **e)** $10^4 \cdot 10^5 = 10^x$ **f)** $10^x \cdot 10^4 = 10^9$

5 Ordne die Zahlen mit Hilfe des Zeichens $<$.

a) $1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{3},\ 3,\ 4,\ \sqrt{5},\ 5,\ \sqrt{6}$

b) $\sqrt{69},\ 7,\ \sqrt{81},\ 5,\ \sqrt{43},\ 6,\ \sqrt{28},\ \sqrt{8},\ \sqrt{15},\ \sqrt{3},\ \sqrt{23},\ 8,\ \sqrt{37},\ 4,\ \sqrt{75}$

6 Vereinfache so weit wie möglich. $(a, b, x, y > 0)$

a) $\sqrt{b^2}$ **b)** $(\sqrt{z})^2$ **c)** $(\sqrt{2a})^2$ **d)** $\sqrt{(ab)^2}$

e) $(\sqrt{3x})^2$ **f)** $\sqrt{(7y)^2}$ **g)** $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a}$ **h)** $\sqrt{xy \cdot xy}$

i) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$

Reduziere die Wurzeln resp. ziehe teilweise die Wurzeln. *Beispiel:* $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

7 **a)** $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{80}$ **c)** $\sqrt{27}$ **d)** $\sqrt{98}$ **e)** $\sqrt{125}$

f) $\sqrt{700}$ **g)** $\sqrt{252}$ **h)** $\sqrt{800}$ **i)** $\sqrt{242}$ **j)** $\sqrt{192}$

8 Vereinfache.

a) $\sqrt{ac^2}$ **b)** $\sqrt{a^2b}$ **c)** $\sqrt{x^2y^2}$ **d)** $\sqrt{uv^2}$

e) $\sqrt{3x^2}$ **f)** $\sqrt{5a^2}$ **g)** $\sqrt{16b}$ **h)** $\sqrt{25c^2}$

Fasse zusammen und ziehe so weit wie möglich die Wurzel.

9 **a)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{33}$ **b)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$ **c)** $\sqrt{35}\cdot\sqrt{5}$ **d)** $\sqrt{39}\cdot\sqrt{12}$

e) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{78}$ **f)** $\sqrt{84}\cdot\sqrt{12}$ **g)** $\sqrt{32}\cdot\sqrt{106}$ **h)** $\sqrt{46}\cdot\sqrt{72}$

i) $\sqrt{56}\cdot\sqrt{2}$

10 **a)** $\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab}$ **b)** $\sqrt{x}\cdot\sqrt{7x}$ **c)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3z^2}$ **d)** $\sqrt{11p}\cdot\sqrt{11}$

e) $\sqrt{a^2c}\cdot\sqrt{c}$ **f)** $\sqrt{5e}\cdot\sqrt{e}$ **g)** $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{32}$ **h)** $\sqrt{3p}\cdot\sqrt{12p}$

i) $\sqrt{24m}\cdot\sqrt{6}$

Reduziere die Wurzeln, klammere gleiche Wurzeln aus und fasse zusammen.
Beispiel: $3\sqrt{12}-p\sqrt{3}=3\cdot 2\sqrt{3}-p\sqrt{3}=6\sqrt{3}-p\sqrt{3}=(6-p)\sqrt{3}$

11 **a)** $3\cdot\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{7}$ **b)** $10\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}$ **c)** $5\sqrt{8}+\sqrt{8}$

d) $9\sqrt{18}-\sqrt{18}$ **e)** $\sqrt{12}+7\sqrt{12}$ **f)** $4\sqrt{75}-2\sqrt{75}+3\sqrt{3}$

g) $17\sqrt{48}-5\sqrt{3}+3\sqrt{27}$ **h)** $\sqrt{2}-\sqrt{8}+2\sqrt{2}$

12 **a)** $5m\sqrt{z}+p\sqrt{z}-3m\sqrt{z}$ **b)** $2x\sqrt{5}+x\sqrt{5}-\sqrt{5}$ **c)** $e\sqrt{6}-4f\sqrt{6}+2e\sqrt{6}$

d) $7a\sqrt{p}-3a\sqrt{p}-4a\sqrt{p}$ **e)** $12a\sqrt{5}+3b\sqrt{5}-11a\sqrt{5}$ **f)** $9y\sqrt{a}-4x\sqrt{a}-5y\sqrt{a}$

g) $5x\sqrt{3}-4x\sqrt{3}-x\sqrt{3}$ **h)** $8a\sqrt{z}-\sqrt{z}-7a\sqrt{z}$

Löse die Gleichung. (x ist eine ganze Zahl, kann auch negativ sein.)

13 **a)** $3x^2=75$ **b)** $64=4x^2$ **c)** $3\cdot\sqrt{x}=12$ **d)** $60=6\cdot\sqrt{x}$

e) $27=3\cdot x^2$ **f)** $3\cdot\sqrt{x}=27$ **g)** $100=4\cdot\sqrt{x}$ **h)** $4\cdot x^2=100$

14 **a)** $x^2+2=27$ **b)** $\sqrt{x}-3=8$ **c)** $\sqrt{x}+4=28$ **d)** $x^2-7=218$

e) $3x^2+1=76$ **f)** $3\cdot\sqrt{x}+3=24$ **g)** $5\cdot\sqrt{x}-4=21$ **h)** $4\cdot x^2-13=87$

15 **a)** $\sqrt{x}:3=6$ **b)** $\sqrt{x}:2=1$ **c)** $x^2:3=12$ **d)** $x^2:7=28$

e) $\sqrt{x}:5=3$ **f)** $\sqrt{x}:3=8$ **g)** $x^2:2=200$ **h)** $x^2:4=225$

16 **a)** $7 \cdot x^2 = 63$ **b)** $5 \cdot \sqrt{x} = 50$ **c)** $2 \cdot x^2 = 162$ **d)** $x^2 : 3 = 27$

e) $3 \cdot \sqrt{x} = 12$ **f)** $x^2 : 2 = 32$ **g)** $7 \cdot \sqrt{x} = 91$ **h)** $\sqrt{x} : 5 = 80$

17 Berechne:

a) $(-1)^6$ **b)** $(-1)^7$ **c)** $(-1)^{42}$ **d)** $(-1)^{537}$

e) $(-2)^4$ **f)** $(-2)^5$ **g)** $(-2)^6$ **h)** $(-2)^7$

18 Welches der Zeichen <, =, > muss man anstelle von $\square$ einsetzen, damit eine wahre Aussage entsteht?

a) $10^3 \; \square \; 10^4$ **b)** $10^4 \; \square \; (-10)^4$ **c)** $10^4 \; \square \; (-10^4)$

d) $(-10)^6 \; \square \; 10^5$ **e)** $(-10)^5 \; \square \; 10^5$ **f)** $10^4 \; \square \; (-10)^6$

g) $(-10)^4 \; \square \; (-10)^6$ **h)** $(-10)^2 \; \square \; (-10)^3$ **i)** $(-10^2) \; \square \; (-10^3)$

j) $(-10)^7 \; \square \; (-10)^4$ **k)** $(-10)^5 \; \square \; (-10)^7$ **l)** $(-10)^6 \; \square \; 10^6$

Berechne:

19 **a)** $(-3)^2 \cdot (-5)$ **b)** $(-3^2) \cdot (-5)$ **c)** $(-7) \cdot (-2^3)$ **d)** $(-7) \cdot (-2)^3$

e) $(-2)^4 \cdot (-3)^2$ **f)** $(-2^4) \cdot (-3)^2$ **g)** $(-2)^4 \cdot (-3^2)$ **h)** $(-2^4) \cdot (-3^2)$

20 **a)** $2^3 : (-2)^3$ **b)** $(-4)^4 : (-4)^3$ **c)** $3^5 : (-3)^3$ **d)** $(-1^8) : (-1)^2$

e) $(-3)^3 : (-3^2)$ **f)** $2^6 : (-2)^4$ **g)** $(-1)^3 : (-1)^7$ **h)** $(-1)^6 : (-1)^{13}$

i) $(-4)^3 : (-4^2)$ **j)** $(-4)^4 : (-4^3)$

21 Löse die Gleichung. (x ist eine ganze Zahl)

a) $x : 7 = (-1)$ **b)** $x : (-1) = 7$ **c)** $x : 0 = (-3)$ **d)** $0 : 0 = x$

e) $x : 0 = 0$ **f)** $0 : (-1) = x$ **g)** $x \cdot 0 = 0$ **h)** $x : (-12) = (-8)$

i) $0 \cdot x = (-1)$ **j)** $x : (-1) = 0$

22 Schreibe die Terme ohne Klammern möglichst einfach:

a) $(-a)^2$ **b)** $(-a)^3$ **c)** $(-x)^5$ **d)** $(-x)^4$

e) $3 \cdot (-a)^2$ **f)** $(-3a)^2$ **g)** $(-3) \cdot (-a)^2$ **h)** $(-3) \cdot (-a^2)$

i) $(-2x)^2$ **j)** $2 \cdot (-x)^2$ **k)** $(-2) \cdot (-x^2)$ **l)** $2 \cdot (-x^2)$

Ergebnisse

1 **a)** 85 **b)** 235 **c)** 115 **d)** 235
e) 85 **f)** 845 **g)** 95 **h)** 625

2 **a)** 211 **b)** 701 **c)** 931 **d)** 121

3 **a)** $2a^2(3b+5c)$ **b)** $y(4y-3z)$ **c)** $9bd(2b+3d)$ **d)** $7y^2z^2(8x-7)$
e) $9b^2(3a-2d)$ **f)** $e(17f-13ez)$ **g)** $12y(3xy-2z^2)$ **h)** $8bc(6a^2c+7b)$

4 **a)** $x=7$ **b)** $x=7$ **c)** $x=4$ **d)** $x=2$ **e)** $x=9$ **f)** $x=5$

5 **a)** $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2<\sqrt{5}<\sqrt{6}<3<4<5$
b) $\sqrt{3}<\sqrt{8}<\sqrt{15}<4<\sqrt{23}<5<\sqrt{28}<6<\sqrt{37}<\sqrt{43}<7<8<\sqrt{69}<\sqrt{75}<\sqrt{81}$

6 **a)** b **b)** z **c)** $2a$ **d)** ab **e)** $3x$
f) $7y$ **g)** $2a$ **h)** xy **i)** ab

7 **a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $4\sqrt{5}$ **c)** $3\sqrt{3}$ **d)** $7\sqrt{2}$ **e)** $5\sqrt{5}$
f) $10\sqrt{7}$ **g)** $6\sqrt{7}$ **h)** $20\sqrt{2}$ **i)** $11\sqrt{2}$ **j)** $8\sqrt{3}$

8 **a)** $c\sqrt{a}$ **b)** $a\sqrt{b}$ **c)** xy **d)** $v\sqrt{u}$
e) $x\sqrt{3}$ **f)** $a\sqrt{5}$ **g)** $4\sqrt{b}$ **h)** $5c$

9 **a)** $3\sqrt{11}$ **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** $5\sqrt{7}$ **d)** $6\sqrt{13}$ **e)** $4\sqrt{39}$
f) $12\sqrt{7}$ **g)** $8\sqrt{53}$ **h)** $12\sqrt{23}$ **i)** $4\sqrt{7}$

10 **a)** $a\sqrt{b}$ **b)** $x\sqrt{7}$ **c)** $3z$ **d)** $11\sqrt{p}$ **e)** ac
f) $e\sqrt{5}$ **g)** $8\sqrt{x}$ **h)** $6p$ **i)** $12\sqrt{m}$

11 **a)** $5\sqrt{7}$ **b)** $7\sqrt{3}$ **c)** $12\sqrt{2}$ **d)** $24\sqrt{2}$
e) $16\sqrt{3}$ **f)** $13\sqrt{3}$ **g)** $72\sqrt{3}$ **h)** $\sqrt{2}$

12 **a)** $(2m+p)\sqrt{z}$ **b)** $(3x-1)\sqrt{5}$ **c)** $(3e-4f)\sqrt{6}$ **d)** 0
e) $(a-3b)\sqrt{5}$ **f)** $4\sqrt{a}(y-x)$ **g)** 0 **h)** $(a-1)\sqrt{z}$

13	**a)**	$5; -5$	**b)**	$4; -4$	**c)**	16	**d)**	100
	e)	$3; -3$	**f)**	81	**g)**	625	**h)**	$5; -5$
14	**a)**	$5; -5$	**b)**	121	**c)**	576	**d)**	$15; -15$
	e)	$5; -5$	**f)**	49	**g)**	25	**h)**	$5; -5$
15	**a)**	324	**b)**	4	**c)**	$6; -6$	**d)**	$14; -14$
	e)	225	**f)**	576	**g)**	$20; -20$	**h)**	$30; -30$
16	**a)**	$3; -3$	**b)**	100	**c)**	$9; -9$	**d)**	$9; -9$
	e)	16	**f)**	$8; -8$	**g)**	169	**h)**	$160\,000$
17	**a)**	1	**b)**	-1	**c)**	1	**d)**	-1
	e)	16	**f)**	-32	**g)**	64	**h)**	-128
18	**a)**	$<$	**b)**	$=$	**c)**	$>$	**d)**	$>$
	e)	$<$	**f)**	$<$	**g)**	$<$	**h)**	$>$
	i)	$>$	**j)**	$<$	**k)**	$>$	**l)**	$=$
19	**a)**	-45	**b)**	45	**c)**	56	**d)**	56
	e)	144	**f)**	-144	**g)**	-144	**h)**	144

20	**a)**	-1	**b)**	-4	**c)**	-9	**d)**	-1	**e)**	3
	f)	4	**g)**	1	**h)**	-1	**i)**	4	**j)**	-4
21	**a)**	$x = -7$	**b)**	$x = -7$	**c)**	keine Lösung	**d)**	keine Lösung	**e)**	keine Lösung
	f)	$x = 0$	**g)**	x beliebig	**h)**	$x = 96$	**i)**	keine Lösung	**j)**	$x = 0$

22	**a)**	a^2	**b)**	$-a^3$	**c)**	$-x^5$	**d)**	x^4
	e)	$3a^2$	**f)**	$9a^2$	**g)**	$-3a^2$	**h)**	$3a^2$
	i)	$4x^2$	**j)**	$2x^2$	**k)**	$2x^2$	**l)**	$-2x^2$

Schlusstest (Zeit: 15 Minuten)

1 $1 + 2 \cdot 3^2$

2 $5^2 + 2 \cdot 3^2 - 6$

3 $\sqrt{98} \cdot \sqrt{10}$

4 $\sqrt{12x}$

5 $\sqrt{2r}\sqrt{18r}$

6 $9 \cdot \sqrt{13} - \sqrt{13}$

7 $5m\sqrt{z} + p\sqrt{z} - 3m\sqrt{z}$

8 $(-2)^3 \cdot (-3)^4$

9 $(-5)^4 : (-5)^3$

10 $-5a^2 \cdot (-5a)^2$

Bestimme x:

11 $100 \cdot 10^x = 10^7$.

12 $30 = 5\sqrt{x}$

13 $4x^2 - 2 = 34$

14 $3\sqrt{x} + 2 = 35$

15 $x : (-5) = -1$

Knobelaufgabe Wer Lust hat, kann noch die folgende Aufgabe lösen:

Mache die Gebilde zu einer wahren Aussage.
Beispiel: Aus 16 9 = 85 entsteht $\sqrt{16} + 9^2 = 85$.

a) 16 9 = 7 **b)** 16 9 = 5 **c)** 16 9 = 13

d) 16 9 = 19 **e)** 16 9 = 97 **f)** 16 9 = 265

g) 16 9 = 337 **h)** 16 9 = 324

Ergebnisse Schlusstest

1 19

2 37

3 $14\sqrt{5}$

4 $2\sqrt{3x}$

5 $6r$

6 $8\sqrt{13}$

7 $(2m+p)\sqrt{z}$

8 -648

9 -5

10 $-125a^4$

11 $x = 5$

12 $x = 36$

13 $3;\ -3$

14 $x = 121$

15 $x = 5$

Ergebnis Knobelaufgabe

Die hier aufgeführten Ergebnisse sind nicht immer die einzigen, die existieren.

a) $\begin{aligned} \sqrt{16}+\sqrt{9} &= 7 \\ 16-9 &= 7 \end{aligned}$

b) $-\sqrt{16}+9=5$

c) $\begin{aligned} \sqrt{16}+9 &= 13 \\ 16-\sqrt{9} &= 13 \end{aligned}$

d) $16+\sqrt{9}=19$

e) $16+9^2=97$

f) $16^2+9=265$

g) $16^2+9^2=337$

h) $\sqrt{16}\cdot 9^2=324$